Beweis einiger vortrefflicher Eigenschaften, mit denen von ebenen Seitenflächen eingeschlossene Festkörper versehen sind *

Leonhard Euler

Einleitung

So wie gradlinige ebene Figuren, deren natürliche Beschaffenheit in der Geometrie untersucht zu werden pflegt, einige gewisse und altbekannte Eigenschaften haben, wie beispielsweise, dass die Anzahl der Winkel gleich der Anzahl der Seiten ist und dass die Summe der Winkel gleich zweimal so vielen rechten Winkeln ist, wie es Seiten gibt, um vier vermindert, so habe ich neulich Elemente der Stereometrie solcher Art skizziert, in welchen ähnliche Eigenschaften von ebenen Seitenflächen umschlossenen Festkörpern enthalten sind. Weil nämlich in der Stereometrie die Körper, die ringsherum von ebenen Seitenflächen begrenzt werden, gleichermaßen berechtigterweise den ersten Platz einnehmen, wie gradlinige Figuren und Formen in der eigens so genannten Planimetrie oder Geometrie, so kommt es in den Sinn ähnliche Prinzipien

*Originaltitel: „Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita “, erstmals publiziert in „Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 4, 1758, pp. 140-160“, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 26, pp. 94 - 108“, Eneström Nummer E231, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Sascha Zielke, im Ramen des Hauptseminars „Euler“ 2013/14 der Stereometrie aufzustellen, aus denen die Bildung von Festkörpern als logische Konsequenz folge und besonders deren Eigenschaften bewiesen werden können. Bei dieser Aufgabe schien es im höchsten Maße wundersam, dass, obwohl die Stereometrie schon seit so vielen Jahrhunderten, genauso wie die Geometrie, entwickelt worden ist, dennoch ihre gleichsam ersten Elemente immer noch unbekannt waren und niemand in so einem langen Zeitabschnitt gefunden worden ist, der es versucht hat, sie ausfindig zu machen und in Ordnung zu bringen. Aber nach Aufsichnehmen dieser Mühe, nachdem ich mehrere vortreffliche Eigenschaften, die allen in ebenen Seitenflächen enthaltenen Körpern gemein sind, entdeckt hatte, und die denen ganz und gar gleich schienen, die zu den Elementen gradliniger ebener Figuren gerechnet zu werden pflegen, habe ich nicht ohne größte Bewunderung entdeckt, dass deren wesentliche dermaßen im Verborgenen liegen, dass ich zur damaligen Zeit den ganzen Eifer auf das Finden von deren Beweis vergeblich verwendet hätte. Und auch von in diesen Sachen ansonsten äußerst versierten Freunden, denen ich jene Eigenschaften mitgeteilt hatte, habe ich nichts an Erkenntnis erlangt, woher ich diese Beweise hätte schöpfen können. Dann, durch die Betrachtung mehrerer Geschlechter von Körpern, bin ich dahin geführt worden einzusehen, dass die Eigenschaften, welche ich in jenen entdeckt hatte, sich auf gänzlich alle Körper erstrecken, auch wenn es mir nicht möglich gewesen war, dies mit einem strengen Beweis zu zeigen. Und glaube ich diese Eigenschaften zu den Klassen von Wahrheit zählen zu müssen, welches es uns zwar zu erkennen, aber nicht zu beweisen möglich wäre. Aber die allgemeinen Eigenschaften von Festkörpern, die noch eines Beweises bedürfen, hängen von einer ab, so dass, wenn sich diese beweisen ließe, alle Elemente der Stereometrie, die sich dargeboten haben, gleichermaßen gesichert wären, wie die Elemente der Geometrie. Aber diese noch nicht bewiesene Eigenschaft, die mehrere in sich umfasst, ist in dieser Proposition enthalten:

In jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Festkörper, überragt die Anzahl der Raumwinkel zusammen mit der Anzahl der Seitenflächen um zwei die Anzahl der Kanten.

Daher habe ich eine andere, nicht weniger vortreffliche, allen Festkörpern dieser Art gemeinsame Eigenschaft deriviert, die sich so verhält:

In jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Festkörper ist die Summe aller ebenen Winkel, mit denen die räumlichen Winkel festgelegt werden, viermal so vielen rechten Winkeln, wie es Raumwinkel gibt, um acht vermindert gleich.

Und diese Proposition hängt so mit der vorhergehenden zusammen, dass, wenn die einen bewiesen werden könnte, man zugleich den Beweis der anderen hätte. Daher wird der Mangel der Elemente der Stereometrie, welchen ich angeführt habe, behoben werden, wenn ein Beweis der einen dieser zwei Propositionen aufgefunden werden wird.
Nachdem ich aber diesen Gegenstand erneut gründlich erwogen hatte, habe ich die ersehnten Beweise dieser Propositionen endlich erlangt, zu welchen ich fast auf die gleiche Weise gelangt bin, auf die in der Geometrie die analoge Proposition über die Summe von Winkeln einer gradlinigen Figur bewiesen zu werden pflegt. So wie nämlich in der Geometrie irgendeine gradlinige Figur, indem ununterbrochen Winkel weggeschnitten werden, schließlich auf ein Dreieck reduziert wird, so habe ich, nachdem irgendein von ebenen Seitenflächen eingeschlossener Festkörper vorgelegt worden ist, beobachtet, dass von diesem ununterbrochen die Raumwinkel weggeschnitten werden können, so dass schließlich eine triangulare Pyramide zurückbleibt. Weil diese die einfachste Figur unter den Festkörpern ist, habe ich aus ihren bekannten Eigenschaften auf diese Weise erkannt, dass umgekehrt zu den Eigenschaften aller Festkörper aufgestiegen werden kann. In einer triangularen Pyramide ist nämlich die Anzahl der Raumwinkel gleich 4, die Anzahl der Seitenflächen gleich 4 und die Anzahl der Kanten gleich 6, deren Doppeltes 12 gibt die Anzahl der ebenen Winkel, die der Summe von 8 rechten Winkeln gleich ist. Nachdem freilich irgendein Punkt innerhalb des Festkörpers genommen worden ist, wenn von da aus zu den einzelnen Raumwinkeln gerade Linien gezogen werden, wird der Festkörper auf diese Weise in ebenso viele Pyramiden geteilt werden, wie es Seitenflächen gibt, welche natürlich die einzelnen Basen festlegen werden, während deren Spitzen in jenem Punkt vereint werden. Und diese Pyramiden, wenn sie nicht triangular sind, werden weiter in triangulare zerschnitten werden. Aber diese Weise irgendeinen Festkörper in dreieckige Pyramiden aufzulösen, trägt zum gegenwärtigen Unterfangen kaum etwas bei. Ich möchte also eine andere Art, auf welche ein Festkörper, indem seine Raumwinkel nacheinander weggeschnitten werden, schließlich auf eine triagulare Pyramide zurückgebracht wird, hier darlegen, woher darauf folgend der Beweis der erwähnten Proposition leicht verfertigt werden wird.

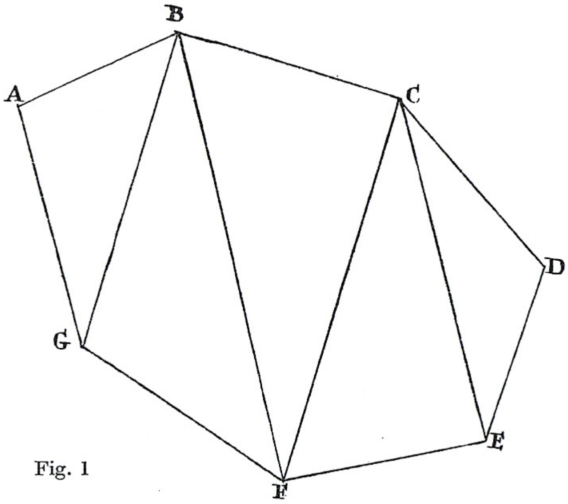

Fig. 1

Aber diese Operation ist der ähnlich, mit der jede beliebige gradlinige Form, während ihre Winkel nacheinander weggeschnitten werden, schließlich auf ein Dreieck zurückgebracht zu werden pflegt. Wenn man nämlich eine ebene Figur (Fig 1) wie vieler Seiten auch immer $ABCDEFGA$ hat, wenn von ihr durch die Gerade CE das Dreieck CDE weggeschnitten wird, wird diese Figur zurückbleiben

$$ABCEFGA$$

deren Winkelzahl um eine Einheit kleiner sein wird. Wenn nun erneut mit der Gerade CF das Dreieck CFE weggeschnitten wird, wird die Figur $ABCFGA$ zurückbleiben. Daher wird, wenn weiter das Dreieck BCF und dann das Dreieck BGF abgetrennt wird, endlich das Dreieck ABG zurückgelassen werden. Aus dieser Auflösung werden leicht die beiden vorzüglichen Eigenschaften ebener Körper bewiesen. Es sei nämlich die Anzahl der Seiten der Figur $ABCDEFG$ gleich L und die Anzahl der Winkel gleich A. Und wenn die zu ziehende Gerade CE von dieser den Winkel D wegschneidet, wird die Winkelanzahl der restlichen Figur gleich $A - 1$ sein, aber die Anzahl der Seiten, weil die zwei Seiten CD und DE beseitigt worden sind, an deren Stelle aber die neue Seite CE hinzugekommen ist, wird gleich $L - 1$ sein. Daher tritt es klar zutage, wenn erneut ein Winkel weggeschnitten wird, dass die Anzahl der Winkel gleich $A - 2$ und die Anzahl der Seiten gleich $L - 2$ sein wird. Und wenn nun auf diese Weise n Winkel abgetrennt werden, wird die Anzahl der

Winkel der restlichen Figur gleich $A - n$ und die Anzahl der Seiten $L - n$ sein. Es sei nun diese restliche Figur ein Dreieck. Es wird $A - n = 3$ und $L - n = 3$ sein, daher folgt, dass $L = A$ sein wird, oder dass in jeder gradlinigen Figur die Anzahl der Seiten gleich der Anzahl der Winkel ist.
Darauf sei R die Anzahl der rechten Winkel, denen alle Winkel der vorgelegten Figur $ABCDEFG$ zugleich genommen gleich sind, und nach Wegschneiden des Winkels D oder des Dreiecks CDE werden von den Seitenflächen der Figur die drei Winkel des Dreiecks CDE weggeschafft, welche zwei rechten gleich sind. Daher wird die Winkelsumme der restlichen Figur $ABCEFG$ $R - 2$ rechten Winkel gleich werden, während die Anzahl der Winkel nun gleich $A - 1$ ist. Wenn erneut ein Winkel weggeschnitten wird, so dass die Anzahl der Winkel gleich $A - 2$ ist, wird deren Summe $R - 4$ rechten sein. Und wenn wir nun n Winkel abtrennen, so dass die Winkelanzahl der restlichen Figur gleich $A - n$ ist, wird deren Summe $R - 2n$ rechten Winkeln gleich werden. Es sei nun diese restliche Figur ein Dreieck oder $A - n = 3$, weil die Summe der Winkel gleich 2 rechten ist, wird $R - 2n = 2$ sein, daher ist aber $2A - 2n = 6$. Wenn was von dieser Gleichung abgezogen wird, wird $2A - R = 4$ oder $R = 2A - 4 = 2L - 4$ sein. Und so steht es fest, dass in jedem Polygon die Summe aller Winkel zweimal so vielen rechten Winkeln, wie es Seiten gibt, um vier vermindert gleich ist.
Auf die gleiche Weise, auf die ich aus einer Sektion gradliniger Figuren zwei vorzügliche Eigenschaften von Figuren dieser Art gefunden habe, möchte ich also die Untersuchung für Festkörper unternehmen, während ich alle von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Festkörpern durch aufeinanderfolgendes Wegschneiden von Raumwinkeln auf triangulare Pyramiden reduzieren werde. Wenn ich dahin gelangt sein werde, werden die Anzahl der Raumwinkel, die Anzahl der Seitenflächen, die Anzahl der Kanten und die Summe aller ebenen Winkel bekannt sein. Damit diese Dinge klarer werden, werde ich diese ganze Sache in den folgenden Propositionen erfassen.

PROPOSITON 1 (PROBLEM)

§1 Nachdem irgendein von ebenen Seitenflächen eingeschlossener Festkörper vorgelegt worden ist, von diesem einen gegebenen Raumwinkel wegzuschneiden, so dass im restlichen Festkörper die Anzahl der Winkel um eine Einheit kleiner ist.

LÖSUNG

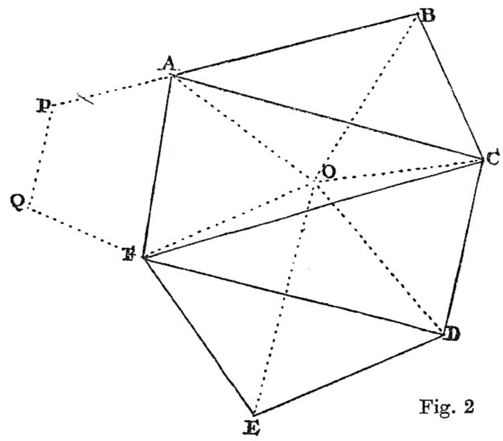

Fig. 2

Es sei O (Fig 2) der abzutrennende Raumwinkel, in welchem die Kanten AO, BO, CO, DO, EO und FO so zusammenlaufen, dass er von den ebenen Winkeln AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA gebildet ist, und die Punkte A, B, C, D, E und F die benachbarten Raumwinkel des Körpers darstellen, welche mit dem Winkel O über die Geraden AO, BO, CO, DO, EO und FO zusammenhängen. Weil nun ein Teil solcher Art vom Festkörper abgetrennt werden muss, so dass der Raumwinkel O von diesem völlig gelöst wird, die übrigen hingegen alle zurückgelassen werden, und dennoch kein neuer Raumwinkel daraus gebildet wird, werde der erste Schnitt durch den benachbarten Winkel B hindurch geführt, entlang der Ebene ABC, bis er schließlich zu den Winkeln A und C gelangt. Dann werde aus O der Schnitt AOC gemacht, auf diese Weise wird die triangulare Pyramide $OABC$ weggeschnitten werden. Dann werden nach Anlegen des Messers an AC der Schnitt zum Winkel F durch die Ebene AFC hindurch gerichtet, von O aus geschehe ein anderer Schnitt bis hin zu FOC, so dass die triangulare Pyramide $OACF$ abgetrennt wird. Weiter werde der Festkörper entlang der Ebene CDF geschnitten und von O aus werde ein anderer Schnitt bis hin zu DF durchgeführt, so dass auf diese Weise die triangulare Pyramide $OCDF$ weggeschnitten wird. Schließlich wird der entlang DEF gemachte Schnitt die triangulare Pyramide $ODEF$ wegschneiden. Und so wird der Raumwinkel O ganz und gar abgetrennt sein, und weil die übrigen Raumwinkel bleiben und kein neuer durch die gemachten Schnitte gebildet worden ist, wird die Anzahl der Raumwinkel im restlichen Körper um eine Einheit vermindert sein. Q.E.I

Korollar 1

§2 Wenn der Festkörper selbst eine triangulare Pyramide war, wird durch einen Schnitt dieser Art die ganze wegbewegt werden, so dass nichts zurückgelassen wird. Aber weil wir diesen Schnitt daher unternehmen, dass wir den Körper schließlich zu einer triangularen Pyramide reduzieren, wird, wenn er schon eine Pyramide dieser Art war, ein Schnitt überhaupt nicht von Nöten sein.

Korollar 2

§3 Wenn der Raumwinkel O, der vom Körper wegzuschneidende, von nur drei ebenen Winkeln gebildet wird oder wenn nur drei Kanten in ihm zusammenlaufen, dann wird er mit einem einzigen Schnitt von einem Körper abgetrennt werden, und auf diese Weise wird eine einzige triangulare Pyramide weggeschafft werden.

Korollar 3

§4 Wenn der Raumwinkel O von vier ebenen Winkeln gebildet wird und ebenso viele Kanten in ihm zusammenlaufen, dann, um ihn abzutrennen, müssen zwei triangulare Pyramiden weggeschnitten werden. Dies wird aber auf zwei Arten (Fig 3) geschehen können.

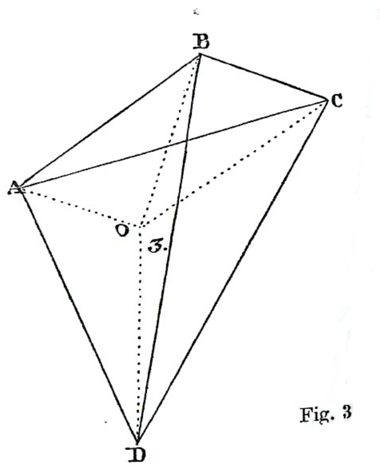

Fig. 3

Dann werden die zwei wegzuschneidenden Pyramiden entweder $OABC$ und $OACD$ oder $OABD$ und $OBCD$ sein. Und wenn die Punkte A, B, C, D nicht in derselben Ebene waren, wird daher der restliche Festkörper eine verschiedene Form erhalten.

KOROLLAR 4

§5 Wenn ein Raumwinkel von fünf ebenen Winkeln gebildet wird und die in ihm zusammenlaufenden Geraden sich zu fünf anderen Raumwinkeln ausdehnen, denn wird der Winkel O geschnitten werden, indem drei triangulare Pyramiden abgetrennt werden und dies wird auf fünf verschiedene Weisen geschehen können, welche auch verschiedene Reste zurücklassen, wenn die fünf benachbarten Raumwinkel nicht in derselben Ebene gelegen haben.

KOROLLAR 5

§6 Weil also dieses Wegschneiden eines einzigen Raumwinkels in jedem beliebigen Winkel des angelegten Körpers unternommen werden kann und es, wenn nicht nur drei ebene Winkel, um den Raumwinkel zu bilden, zusammenlaufen, auf mehrere Weisen unternommen werden kann, tritt es klar zutage, dass jeder beliebige Festkörper, welcher nicht schon eine triangulare Pyramide ist, auf mehrere Weisen um einen Raumwinkel vermindert werden kann.

KOROLLAR 6

§7 Wie viele Raumwinkel auch immer der vorgelegte Körper hatte, während auf diese Weise deren Anzahl ununterbrochen um eine Einheit vermindert wird, wird er schließlich, wenn nur vier Raumwinkel übrig gewesen sind, zu einer triangularen Pyramide beschränkt sein, und weil ja die einzelnen abgetrennten Anteile triangulare Pyramiden sind, wird auf die Weise der ganze Körper in triangulare Pyramiden zerschnitten werden.

BEMERKUNG

§8 Wenn im vorgelegten Festkörper die Anzahl der Raumwinkel gleich S ist, nachdem auf die angegebene Weise ein einziger derer abgetrennt worden war, wird im restlichen Körper die Anzahl der Raumwinkel gleich $S - 1$ sein. Obwohl in dieser Verminderung die Kraft der Proposition enthalten ist, scheint sie in mehreren Fällen einer Ausnahme zu bedürfen. Wenn nämlich der vorgelegte Körper eine triangulare Pyramide war (Fig 4), wird Wegschneiden eines Winkels zugleich die ganze Pyramide beseitigen, sodass nichts zurückgelassen wird.

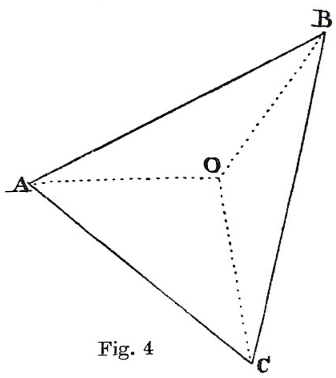

Fig. 4

Denn nach Ausführung des Schnittes entlang der Ebene ABC, welche die Basis der Pyramide $OABC$ festlegt, wird zugleich die ganze Pyramide weggeschnitten. Aber in diesem Fall kann die Sache so aufgefasst werden, als wenn die Basis ABC zurückgelassen wird. Auch wenn diese ebene Figur mit keiner Dicke versehen ist, kann sie dennoch als nur aus drei Winkeln bestehender

Festkörper angesehen werden, welcher zwei Seitenflächen und drei Kanten hat. Er wird natürlich ein triangulares Prisma verschwindender Höhe bezeichnen, in welchem die lateralen Seitenflächen in Null übergehen und die obere Basis mit ihren Winkeln auf die niedrigere Basis fällt. Auf diese Weise bleiben die beiden oben erwähnten Eigenschaften von Festkörpern richtig. Weil nämlich die Anzahl der Raumwinkel in diesem Fall $S = 3$ ist, die Anzahl der Seitenflächen $H = 2$ und die Anzahl der Kanten $A = 3$ ist, tritt es klar zutage, dass $S + H = A + 2$ ist. Dann wird aber die Summe der in jeder der beiden Seitenflächen enthaltenen Winkel 4 rechten Winkeln gleich, welche Anzahl gleich $4S - 8$ ist. Dasselbe passiert bei allen Pyramiden, wenn der Winkel der Spitze O von ihr weggeschnitten wird, wo die ganze Pyramide zugleich beseitigt wird, dann wird aber allein die Basis übrig gelassen. Wenn diese ein Polygon von n Seiten ist, wird sie als Festkörper betrachtet werden können, in welchem die Anzahl der Raumwinkel $S = n$, die Anzahl der Seitenfläche $H = 2$ und die Anzahl der Kanten $A = n$ ist, so dass erneut $S + H = A + 2$ ist. Darauf, weil jede der beiden Seitenflächen ein Polygon von n Seiten ist, werden alle auf der Randfläche enthaltenen Winkel $4n - 8 = 4S - 8$ rechten Winkeln gleich werden, wie es das andere Theorem erfordert. Auch wenn aber diese Fälle der Wahrheit nicht widersprechen, ist es dennoch bei der gegenwärtigen Aufgabe nicht von Nöten, auf sie zu achten, weil es nämlich vorgelegt ist, alle Festkörper auf triangulare Pyramiden zurückzuführen. Wenn der Festkörper schon eine Pyramide dieser Art war, wird das Wegschneiden eines gewissen Winkels völlig zu unterlassen sein. Wenn er aber eine Pyramide ist, die eine Basis mehrerer Seiten hat, dann wird nicht der spitze Winkel, sondern angemessener der auf der Basis gelegene Winkel von ihm abgetrennt werden müssen, welcher von nur drei ebenen Winkeln gebildet wird. Auf diese Weise wird immer nach dem Wegschneiden eine Pyramide zurückgelassen werden, deren Anzahl an Raumwinkeln um eins kleiner sein wird als die zuvor. Und was für ein Festkörper auch immer allgemein vorgelegt werden wird, die Resektion wird immer von dem Raumwinkel aus begonnen werden müssen, der aus möglichst wenigen ebenen Winkeln gebildet worden ist, damit immer ein gewisser Anteil des Festkörpers zurückbleiben wird, bis schließlich zu einer triangularen Pyramide gelangt wird. Dennoch hängt indes die Kraft der folgenden Beweise nicht von dieser Einschränkung ab, welche ich nur zu dem Zweck beigefügt habe, damit der Umsicht ersichtlich, nicht aber vermieden wird.

Proposition 2 (Problem)

§9 Wenn vom vorgelegten Körper ein gewisser Raumwinkel auf die zuvor dargelegte Weise weggeschnitten wird und so die Anzahl der Raumwinkel um eine Einheit vermindert wird, im zurückgelassenen Körper so die Anzahl der Seitenflächen wie die Anzahl der Kanten und ebenso die Summe aller ebenen Winkel zu bestimmen.

Lösung

Für den vorgelegten Festkörper sei die Anzahl der Raumwinkel gleich S, die Anzahl der Seitenflächen gleich H, die Anzahl der Kanten gleich A und die Summe aller ebenen Winkel werde R rechten Winkeln gleich. Es sei nun O (Fig 2) der wegzuschneidende Raumwinkel, so, dass, nachdem er weggeschnitten worden ist, im übrigen Festkörper die Anzahl der Raumwinkel gleich $S-1$ sein wird. Und damit wir die übrigen Beschaffenheiten des zurückbleibenden Festkörpers erkennen, wollen wir zuerst die Summe aller ebenen Winkel betrachten, die wir im ganzen Festkörper gleich R rechten Winkeln setzen. Zuerst gehen durch das Wegschneiden des Winkels O aus der Zahl der ebenen Winkel alle in den Dreiecken AOB, BOC, COD, DOE, EOF und FOA enthaltenen Winkel heraus, weil diese Dreiecke von der Oberfläche des Körpers abgetrennt werden. Es sei n die Anzahl dieser Dreiecke oder die der betrachteten Winkel A, B, C, D etc, und die Summe der weggeschafften Winkel wird gleich $2n$ rechten sein. Aber nach Abtrennen dieser Dreiecke wird an deren Stelle die Oberfläche des Körpers nun durch die Dreiecke ABC, ACF, CFD und DFE begrenzt werden, deren Anzahl um zwei kleiner ist, als jene und daher gleich $n-2$. Weil nun die Winkel dieser Dreiecke darüber hinaus hinzukommen und deren Summe gleich $2n-4$ rechten Winkeln ist, ist es offenbar, dass durch Wegschneiden des Raumwinkels O die Summe der ebenen Winkel R zuerst um $2n$ rechte Winkel vermindert wird, dass diese aber wiederum um $2n-4$ rechte Winkel vermehrt wird, woher die Verminderung 4 rechte Winkel sein wird. Daher wird im restlichen Festkörper die Summe aller ebenen Winkel $R-4$ rechten gleich werden, und so wird nach Wegschneiden jedes Raumwinkels die Summe aller ebenen Winkel um vier rechte Winkel vermindert werden.
Wenn alle in O zusammenlaufenden Seitenflächen Dreiecke waren, werden durch die Abtrennung all diese Seitenflächen ausgeschnitten werden. Wenn

deren Anzahl n genannt wird, wird daher die Anzahl der Seitenflächen H um die Zahl n vermindert werden. Aber anstelle dieser Seitenflächen werden neue, aus dem Schnitt entspringende, triangulare Seitenflächen auf der Oberfläche des Körpers erscheinen, natürlich ABC, ACF, CFD, DFE, deren Anzahl $n-2$ ist. Daher wird die Anzahl der Seitenflächen, die zuvor H war, nun sein:

$$H - n + (n-2) = H - 2$$

Aber wenn es passiert, dass zwei oder mehrere dieser Dreiecke in der selben Ebene gelegen sind, wie wenn beispielsweise die Dreiecke ABC und ACF in der selben Ebene festgelegt sind, werden sie nicht zwei, sondern eine vierseitige Seitenfläche darbieten, so dass die Anzahl der Seitenflächen gleich $H-3$ sein wird. Und wenn dieses Ereignis zweier Seitenflächen auf der selben Ebene dieser Art $\mu - fach$ auftritt, wird die Anzahl der Seitenflächen gleich $H-2-\mu$ sein. Aber wenn nicht alle der in O zusammenlaufenden Seitenflächen Dreiecke waren, sondern eine einzige, wie beispielsweise $AOFQP$ aus mehreren Seiten besteht, ist es offenbar, dass durch das Wegschneiden des Dreiecks AOF nicht die ganze Seitenfläche weggeschafft wird, sondern der übrige Teil $AFQP$ immer noch in die Zählung der Seitenflächen eingeht. So wird die Anzahl der Seitenflächen gleich $H-2-\mu+1$ sein. Und wenn unter den O zusammenlaufenden Seitenflächen ν nicht als dreieckige Seitenflächen aufgefunden werden, wird die Anzahl der übrigen Seitenflächen gleich $H-2-\mu+\nu$ sein. Für das Ausfindigmachen der Anzahl der Kanten, die nach dem Wegschneiden des Winkels O übrig bleiben, wollen wir zuerst vor Allem festlegen, dass alle in O zusammenlaufenden Seitenflächen Dreiecke sind. Und zuerst werden freilich aus der Anzahl der Kanten die Kanten OA, OB, OC, OD ect herausgehen, deren Anzahl gleich n ist, aber an deren Stellen werden die Kanten AC, CF, FD neu hinzukommen, deren Anzahl gleich $n-3$ ist, und so wird die Anzahl der Kanten sein:

$$A - n + (n-3) = A - 3$$

Wenn freilich die neuen Seitenflächen ABC, ACF etc zueinander geneigt waren. Aber wenn zwei von diesen ABC, ACF in der selben Ebene gelegen waren, so dass sie eine einzige Seitenfläche festgelegt haben, wird die Kante AC verschwinden und die Anzahl der Kanten wird $A-3-1$ sein. Und wenn ein Ereignis von zwei Seitenflächen in derselben Ebene dieser Art $\mu - fach$ auftritt, wie wir zuvor festgelegt haben, wir die Anzahl der Kanten gleich $A-3-\mu$ sein. Darauf, wenn eine bestimmte dieser den Winkel O bildenden

Seitenflächen nicht dreieckig ist, natürlich die Seitenfläche $AOFQP$, dann entsteht durch die Abtrennung des Dreiecks AOF die neue Kanten AF, die zuvor nicht da war, woher die Anzahl der Kanten in diesem Fall um eine Einheit erhöht werden wird. Und wenn, wie wir zuvor festgelegt haben, unter den in O zusammenlaufen Seitenflächen nicht dreieckige aufgefunden werden, wird die Anzahl der Kanten im vorgelegten Körper nach dem Wegschneiden des Winkels O gleich $A - 3 - \mu + \nu$ sein, nachdem sie zuvor A gewesen war. Q.E.I

Korollar 1

§10 Wenn daher also ein von ebenen Seitenflächen eingeschlossener Festkörper um einen Raumwinkel vermindert wird, so dass die Anzahl der Raumwinkel gleich $S - 1$ ist, weil sie zuvor S war, wird die Summe aller ebenen Winkel um vier rechte Winkel gemindert, oder nachdem sie zuvor gleich R rechten Winkeln gewesen war, wird sie nun $R - 4$ rechten Winkeln gleich sein.

Korollar 2

§11 Weil die Anzahl der Seitenflächen, die zuvor H war, nach dem Abschneiden des Winkels O gleich $H - 2 - \mu + \nu$ ist, tritt es klar zutage, dass es geschehen kann, dass die Anzahl der Seitenflächen größer wird, was passieren wird, wenn $\nu > 2 + \mu$ ist, wo μ und ν die Werte erhalten, die in der Lösung angegeben worden sind.

Korollar 3

§12 Es tritt klar zutage, dass dasselbe in der Anzahl der Kanten geschehen kann, die, nachdem sie vor der Stutzung des Winkels O gleich A gewesen war, nun gleich $A - 3 - \mu + \nu$ aufgefunden worden ist. Diese Anzahl ist größer als jene, wenn $\nu > 2 + \mu$ war. In diesem Fall wird also die Anzahl der Seitenflächen um Vieles mehr vermehrt werden.

Korollar 4

§13 Weil in den Ausdrücken $H - 2 - \mu + \nu$ und $A - 3 - \mu + \nu$ die Buchstaben μ und ν dasselbe bedeuten, tritt es klar zutage, dass die Abnahme der Anzahl der Kanten A um eine Einheit größer ist, als die Abnahme der Anzahl der Seitenflächen. So, wenn die Anzahl der Seitenflächen nach dem Abschneiden eines einzigen Raumwinkels gleich $H - \alpha$ wird, wird die Anzahl der Kanten gleich $A - \alpha - 1$ werden.

Korollar 5

§14 Daher wird also die Differenz zwischen der Kanten der Seitenflächen und der Anzahl der Seitenflächen, die zu Anfang $A - H$ gewesen war, nun nach der Entfernung eines einzigen Raumwinkels gleich $A - H - 1$ sein. Diese Differenz wird natürlich immer um eine Einheit kleiner, wie auch immer der Körper in Bezug auf die Buchstaben μ und ν beschaffen war.

Bemerkung

§15 Aus diesen Dingen werden sich sehr leicht Beweise der oben erwähnten Lehrsätze verfertigen lassen, die in keiner Weise niederer sind, als die in der Geometrie üblichen Beweise, außer dass hier wegen der natürlichen Beschaffenheit der Festkörper der Vorstellungskraft mehr zuzuteilen ist, wenn freilich die Festkörper über einer Ebene konstruiert werden. Aber wenn Körper von dieser Art gebildet werden würden, wären alle Dinge gleichermaßen klar. Im Übrigen sind die Dinge, die ich in der Lösung dieses Problems aufgenommen habe, per se offenbar. Wenn man nämlich das Polygon $ABCDEF$ hat, mit n Seiten grenzt, wird dem leicht Aufmerksamen bald klar werden, wenn die Figur durch Ziehen von Diagonalen in Dreiecke zerschnitten wird, dass die Anzahl dieser Dreiecke gleich $n - 2$ sein wird und die Anzahl der auf diese Weise gezogenen Diagonalen gleich $n - 3$ sein wird. Ein Viereck wird nämlich mit einer Diagonale in zwei Dreiecke, ein Fünfeck mit zwei Diagonalen in drei Dreiecke und ein Sechseck von drei Diagonalen in vier Dreiecke zerteilt und so weiter.

Proposition 3 (Theorem)

§16 In jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Festkörper ist die Summe alle ebenen Winkel, die es in seinen Seitenflächen gibt, viermal so vielen rechten Winkeln, wie Raumwinkel vorhanden sind, um acht vermindert gleich. Oder, wenn die Anzahl der Raumwinkel gleich S ist, wird die Summe aller ebenen Winkel $4S - 8$ rechten Winkeln gleich.

Beweis

In irgendeinem Festkörper sei die Anzahl der Raumwinkel gleich S, die Summe aller ebenen Winkel werde aber R rechten Winkeln gleich, so dass bewiesen werden muss, dass $R = 4S - 8$ ist. Nun werde auf die zuvor angegebene Weise vom Festkörper ein einziger Raumwinkel abgetrennt, so dass die Anzahl der Raumwinkel, welche er haben wird, gleich $S - 1$ ist, und die Summe aller ebenen Winkel wird gleich $R - 4$ rechten Winkeln sein. Wenn erneut ein Raumwinkel abgetrennt wird, so dass die Anzahl der übrigen $S - 2$ ist, wird die Summe der ebenen Winkel gleich $R - 8$ rechten sein, und indem so fortgeschritten wird, wird es klar zutage treten, dass für jede Anzahl der Raumwinkel die Summe aller ebenen Winkel sein wird, wie die folgende Tabelle anzeigt:

Anzahl der Raumwinkel	Summe aller ebenen Winkel
S	R rechte Winkel
$S - 1$	$R - 4$ rechte Winkel
$S - 2$	$R - 8$ rechte Winkel
$S - 3$	$R - 12$ rechte Winkel
...	...
$S - n$	$R - 4n$ rechte Winkel

Weil wir also mit dieser wiederholten Stutzung zu $S - n$ Raumwinkeln gelangen, wird die Summe der ebenen Winkel gleich $R - 4n$ rechten Winkeln sein. Aber auf diese Weise wird schließlich zu 4 Raumwinkeln gelangt werden, in welchem Fall der Körper in eine triangulare Pyramide übergehen wird, in welcher bekannt ist, dass die Summe aller ebenen Winkel gleich 8 rechten Winkeln ist. Das heißt, wenn $S - n = 4$ ist, wird $R - 4n = 8$ oder $R = 4n + 8$ sein. Aber daher ist $n = S - 4$, nach Einsetzen welches Wertes hier werden wird

$$R = 4S - 16 + 8 = 4S - 8$$

so dass in jedem Festkörper die Summe aller ebenen Winkel viermal so vielen rechten Winkeln, wie es Raumwinkel gibt, um acht vermindert gleich wird.

Bemerkung

§17 Obwohl das andere Theorem so von diesem abhängt, dass, wenn dieses bewiesen war, zugleich die Gültigkeit jenes ans Licht gebracht worden ist, kann dennoch aus dem vorausgeschickten Problem auch ein Beweis des anderen Theorems auf die folgende Weise zustande gebracht werden.

Proposition 4 (Theorem)

§18 In jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Festkörper überschreitet die Anzahl der Seitenflächen zusammen mit der Anzahl der Raumwinkel um zwei die Anzahl der Kanten.

Beweis

Es sei in irgendeinem vorgelegten Festkörper:

- die Anzahl der Raumwinkel gleich S
- die Anzahl der Seitenflächen gleich H
- die Anzahl der Kanten gleich A

und zuvor haben wir gesehen, wenn durch das Wegschneiden eines einzigen Raumwinkels die Anzahl S um eine Einheit vermindert wird, dass dann die Differenz zwischen der Anzahl der Kanten und der Anzahl der Seitenflächen gleich $A - H - 1$ sein wird. Nachdem also die Stutzung fortgesetzt worden ist, hat folgende Tabelle ihre Gültigkeit:

wenn die Anzahl der Raumwinkel ist	wird der Übertrag der Kanten über die Anzahl der Seitenflächen sein
S	$A - H$
$S - 1$	$A - H - 1$
$S - 2$	$A - H - 2$
...	...
$S - n$	$A - H - n$

Wann immer also auf diese Weise zu einer triangularen Pyramide gelangt werden wird, in welcher die Anzahl der Raumwinkel gleich 4, die Anzahl der Seitenflächen gleich 4 und die Anzahl der Kanten gleich 6 ist, so dass Übertrag der Anzahl der Kanten über die Anzahl der Seitenflächen gleich 2 ist, ist es ersichtlich, wenn $S - n = 4$ wird, dass $A - H - n = 2$ sein wird. Daher ist also $n = S - 4$, daher aber $n = A - H - 2$. Und so hat man:

$$S - 4 = A - H - 2 \text{ oder } H + S = A + 2$$

Daher steht fest, dass in jedem von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Festkörper die Anzahl der Seitenflächen H zusammen mit der Anzahl der Raumwinkel S um zwei die Anzahl der Kanten überragt. Q.E.D

Bemerkung

§19 Nachdem also diese Theoreme bewiesen worden sind, sind die Elemente der Stereometrie die ich zu anderer Zeit dargelegt habe, mit strengsten Beweisen untermauert worden, so dass sie den Elementen der Geometrie in nichts nachstehen. Aber ich gestehe, nur die ersten Elemente der Geometrie so angeführt zu haben, auf denen die Weiterzuentwickelnde Wissenschaft aufgebaut werden muss, die natürlich viele wunderbare Beschaffenheiten von Körpern in sich umfasst, welche wir noch überhaupt nicht kennen. Weil aber die Dichte eines jeden vorgelegten Körpers gesucht zu werden pflegt, möchte ich anstelle des Schlussschnörkels noch eine Art angeben, den Rauminhalt einer triangularen Pyramide zu finden. Weil nämlich, nachdem irgendein Punkt innerhalb eines von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen Festkörpers angenommen worden ist, der Festkörper in so viele Pyramiden aufgelöst wird, wie er Seitenflächen hat, während jede beliebige Seitenfläche eine Basis der Pyramide festlegt, aber jede Pyramide, deren Basis nicht dreieckig ist, leicht in triangulare Pyramiden aufgelöst wird, genügt es, das Volumen einer triangularen Pyramide gefunden zu haben. Weil dieses erhalten wird, wenn die Basis mit dem dritten Teil der Höhe multipliziert wird, werde ich zeigen, wie, wenn die Seiten der Pyramide gegeben waren, aus ihnen das Volumen definiert werden kann. Genauso wie die Fläche eines Dreiecks aus drei gegebenen Seiten bestimmt zu werden pflegt.

Proposition 5 (Problem)

§20 Nachdem die sechs Seiten oder Kanten einer triangularen Pyramide gegeben worden sind, ihr Volumen zu finden.

Lösung

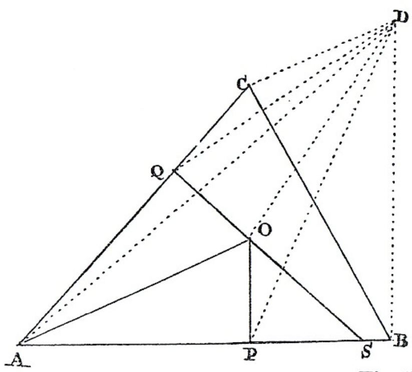

Fig. 5

Es sei (Fig 5) $ABCD$ eine triangulare Pyramide, deren Basis das Dreieck ABC und Spitze D ist, und ihre Seiten werden $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$ festgelegt. Nun werden in den Seitenflächen ADB und ADC aus D zu den entgegengesetzten Basen die Lote DP und DQ gefällt und in der Basis ABC werden von den Punkten P und Q aus zu den Seiten AB und AC die einander in O schneidenden Normalen PO und QO gezogen. Es wird die Gerade DO die Senkrechte aus der Spitze D zur Basis ABC sein, woher das Volumen gleich $\frac{1}{3} \cdot DO \cdot$ Fläche ABC sein wird. Aber nach Ziehen von DO

wird sein:

$$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{AD^2 - AP^2 - PO^2}$$

Nun ist aus den Elementen der Geometrie bekannt, dass ist:

$$AP = \frac{aa + dd - ee}{2a} \text{ und } AQ = \frac{bb + dd - ff}{2b}$$

Daher wird nach Verlängern von QO zu S, wenn der Winkel $BAC = \alpha$ genannt wird, sein

$$QS = AQ \cdot tan(\alpha) \text{ und } AS = \frac{AQ}{cos(\alpha)}$$

daher

$$PS = \frac{AQ}{cos(\alpha)} - AP$$

Aber weil $QS : AG : AS = PS : PO : OS$ ist, wird sein

$$PO = \frac{AQ - PS}{QS} = \frac{PS}{tan(\alpha)} = \frac{AQ}{sin(\alpha)} - \frac{AP}{tan(\alpha)} \text{ oder } PO = \frac{AQ - AP \cdot cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

dann aber

$$OS = \frac{AS \cdot PS}{QS} = \frac{PS}{sin(\alpha)} = \frac{AQ}{sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)} - \frac{AP}{sin(\alpha)}$$

und daher

$$QO = QS - OS = AQ \cdot tan(\alpha) - \frac{AQ}{sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)} + \frac{AP}{sin(\alpha)} = \frac{AP - AQ \cdot cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

Daher wird sein

$$AO^2 = AP^2 + PO^2 = \frac{AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cdot cos(\alpha)}{sin^2(\alpha)}$$

und daher

$$DO^2 = \frac{AD^2 \cdot sin^2(\alpha) - AP^2 - AQ^2 + 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot cos(\alpha)}{sin^2(\alpha)}$$

Aber die Fläche des Dreiecks ABC ist gleich $\frac{1}{2}ab \cdot sin(\alpha)$, woher das Volumen der Pyramide sein wird:

$$= \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \sqrt{AD^2 \cdot sin^2(\alpha) - AP^2 - AQ^2 + 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot cos(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{\begin{array}{l} aabbdd \cdot sin^2(\alpha) - \frac{1}{4} \cdot bb(aa + dd - ee)^2 - \frac{1}{4} \cdot aa(bb + dd - ff)^2 \\ + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot (aa + dd - ee) \cdot (bb + dd - ff) \cdot cos(\alpha) \end{array}}$$

Darauf ist aus dem Dreieck ABC:

$$cos(\alpha) = \frac{aa+bb-cc}{2ab} \text{ und daher } sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{4aabb}(aa+bb-cc)^2$$

nach Einsetzen welcher Werte der Rauminhalt der Pyramide hervorgehen wird als:

$$\frac{1}{12} \cdot \sqrt{\begin{array}{l} 4aabbdd - dd(aa+bb-cc)^2 - bb(aa+dd-ee)^2 - aa(bb+dd-ff)^2 \\ +(aa+bb-cc)\cdot(aa+dd-ee)\cdot(bb+dd-ff) \end{array}}$$

welcher nach Entwickeln der Formel in die folgende Form übergeht:

$$\frac{1}{12} \cdot \sqrt{\begin{array}{l} aaccdd + aabbee + aabbff + aaddff + bbccdd + bbddee + aaccff \\ +aaeeff + bbccee + bbeeff + ccddee + ccddff - aabbcc - aaddee \\ -bbddff - cceeff - a^4ff - aaf^4 - b^4ee - bbe^4 - c^4dd - ccd^4 \end{array}}$$

die noch bequem so dargeboten werden kann:

$$\frac{1}{12} \cdot \sqrt{\begin{array}{l} aaff(bb+cc+dd+ee) - aaff(aa+ff) - aabbcc + bbee(aa+cc+dd+ff) \\ +bbee(bb+ee) - aaddee + ccdd(aa+bb+ee+ff) - ccdd(cc+dd) \\ -ccdd(cc+dd) - bbddff - cceeff \end{array}}$$

Und so wird aus den sechs angegeben Seiten a, b, c, d, e, f einer triangularen Pyramide ihr Volumen definiert. Q.E.I

Bemerkung 1

§21 Damit die Art, auf welche in diesem Ausdruck die Seiten a, b, c, d, e, f kombiniert werden, deutlicher erkannt wird, ist es anzumerken, dass aus ihnen vier Dreiecke gebildet werden, natürlich

- ΔABC besteht aus den Seiten a, b, c
- ΔABD besteht aus den Seiten a, d, e
- ΔACD besteht aus den Seiten b, d, f

- ΔBCD besteht aus den Seiten c, e, f woher es klar zutage tritt, dass die Seite a mit den einzelnen der übrigen, um Dreiecke festzulegen, zusammenläuft, außer mit der Seite f, weswegen ich diese Seiten a und f disjunkt bezeichnen werde, weil sie miteinander nicht verbunden sind. Auf die gleiche Weise werden die Seiten b und e disjunkt sein und ebenso die Seiten c und d.
  Es tauchen also nach dem Wurzelziehen zuerst die aus den disjunkten Seiten gebildeten Terme $aaff$, $bbee$, $ccdd$ auf, die mit der Summe der Quadrate der übrigen multipliziert worden sind. Darauf werden dieselben Terme negativ genommen mit der Summe ihrer Quadrate multipliziert, und davon werden die Produkte aus den Quadraten der drei Seiten eines Dreiecks subtrahiert.

Bemerkung 2

§22 Es kann auch für den Rauminhalt der Pyramide eine ein wenig einfachere Formel gefunden werden, wenn nur drei in einem einzigen Raumwinkel zusammenlaufende Seiten gegeben sind, zusammen mit den drei ebenen Winkeln, welche sie dort festlegen. Es seien nämlich die drei im Raumwinkel A zusammenlaufenden Seiten $AB = a$, $AC = b$, $AD = d$, des Weiteren die ebenen Winkel $BAC = p$, $BAD = q$, $CAD = r$. Und aus diesen wird das Volumen der Pyramide

$$\frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot d \cdot \sqrt{1 - cos^2(p) - cos^2(q) - cos^2(r) + 2 \cdot cos(p) \cos cos(q) \cdot cos(r)}$$

welche auf die folgende Form reduziert wird:

$$\frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot d \sqrt{sin \frac{p+q+r}{2} \cdot sin \frac{p+q-r}{2} \cdot sin \frac{p+r-q}{2} \cdot sin \frac{q+r-p}{2}}$$

daher tritt es klar zutage, damit die Fläche reell hervorgeht, dass zwei der drei in einem gewissen Raumwinkel zusammenlaufenden ebenen Winkel p, q, r zugleich genommen größer als der dritte sein müssen.